

Gauß-Krüger-Koordinaten

1. Ein Geldschein zum Einstieg

Was zeigt uns ein alter 10-DM-Schein zum Thema?

Die Vorderseite zeigt **Carl Friedrich Gauß**, geboren am 30.04.1777 in Braunschweig, gestorben am 23.02.1855 - als an die **E.ON Mitte** noch nicht zu denken war - in **Göttingen**, wo er an der 1734 gegründeten Universität Professor für Astronomie und Direktor der Sternwarte war. So zeigt die Vorderseite neben Gauß auch das Stadtbild von Göttingen mit der herausragenden Jakobikirche.

Gauß war sehr vielseitig: ein bedeutender Mathematiker, Astronom und Physiker. Seine astronomischen Bahnberechnungen führten zur Wiederauffindung des Planetoiden CERES . Nach Gauß wurde die alte Einheit für magnetische Induktion benannt. Mehrere Vermessungs- und Forschungsschiffe bekamen seinen Namen. Auf dem Hohen Hagen, einem erloschenen Vulkan zwischen Dransfeld und Jühnde, der Gauß 1822 als Standpunkt für Landvermessungen diente, steht der nach ihm benannte **Gaußturm**. In einem kleinen Museumszimmer sind Nachbildungen der von ihm benutzten Geräte ausgestellt.

Für die Statistik nicht mehr wegzudenken ist die Gauß-Verteilung, die als Formel und Kurve auf dem 10-DM-Schein innerhalb des Stadtbildes von Göttingen neben seinem Porträt zu sehen ist. Statistische und wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen sind auch Basis für die Ermittlung der Zuverlässigkeit elektrischer Betriebsmittel.

Die Elektrotechniker rechnen, wenn es komplex wird, in der **Gaußschen Zahlenebene**. Das **Gaußsche Eliminationsverfahren** dient in der numerischen Mathematik der Berechnung linearer Gleichungssysteme und wird auch für Lastflussberechnungen in der Energieversorgung angewandt.

Hier soll nun die Kartografie vertieft werden, zu der uns die Rückseite des 10-DM-Scheines Auskunft gibt. Gauß war ab 1816 mit der Gradvermessung des Königreiches Hannover beschäftigt und vervollkommnete dabei die Methoden der Vermessungskunde, der **Geodäsie**. Die beiden abgebildeten Einzelheiten, der **Sextant** und das Dreiecksnetz (Stichwort: Triangulation) weisen darauf hin.

2. Die Erde als Kugel und als Ellipsoid

Die Erde ist eine **Kugel** - sagen wir heute so leicht daher. Unsere Vorvorfahren dachten sie sich noch als Scheibe. Bei Thales von Milet schwamm sie im Ozean in einer Hohlkugel aus Himmel und Unterwelt.

Im 5 Jh. v. Chr. kamen die Griechen (Pythagoräer) und Chinesen unter anderem durch astronomische Beobachtungen auf die wirkliche Form der Erde. Im finsternen Mittelalter ging dieses Erkenntnis unter. Mit dem Übergang zur Renaissance beschäftigten sich wieder weltliche Gelehrte mit den antiken Quellen. Martin **Behaim**, ein reisender Kaufmann aus Nürnberg (*06.10.1459 in Nürnberg, + 29.07.1507 in Lissabon) schuf 1492 den ältesten erhaltenen **Globus** (Germ. Nationalmuseum in Nürnberg, Globus = lat. Kugel). Kolumbus' Westkurs über den Atlantik mit Ziel Indien sollte 1492 den Beweis erbringen.

Die Kugelform ist nur eine sehr grobe Näherung. Für die weiteren Betrachtungen seien hier aber schon die Koordinaten des auf die Kugel zurückgehenden Systems (geogr. Länge und Breite) gezeigt. Mit ihnen lässt sich das aus dem Geografieunterricht bekannte Gradnetz konstruieren, wie es schon in Anfängen in der Antike entwickelt wurde.

Bezugspunkte sind die **Pole**, also die Durchstoßpunkte der Rotationsachse der Erde. Der Äquator mit ca. 40.000 km Länge hat die geographische Breite 'NULL'. Der Längengrad (Meridian) 'NULL' ist nicht so leicht festzulegen. 1634 ging der Nullmeridian durch die Kanareninsel **Ferro**, 1720 durch Paris und erst 1884 wurde auf einer internationalen Konferenz in Washington, D.C., beschlossen, die königliche Sternwarte in **Greenwich** (seit 1675 Observatorium) am Südufer der Themse bei London als Bezugspunkt festzulegen.

Die genaue Vermessung des Erdkörpers ergab eine Abflachung an den Polen (Äquatorradius: 6.378,137 km, Polradius: 6.356,752 km, also ein 'Äquatorwulst' von rund 21 km bzw. eine Abflachung um $1:298,257 = 3,35$ Promille). Diese Form wurde durch ein Rotationsellipsoid angenähert und als Referenzellipsoid oder **Geoid** (Äquipotentialfläche des Erdschwerefeldes) definiert.

Noch genauer analysiert, hat die Erde im Meridian-Querschnitt eine 'Birnenform', da sie im Norden im Mittel 10 m dicker und im Süden 30 m schlanker als das Ideal ist. Ein Schnitt in Äquatorebene offenbart statt eines idealen Kreises eine 'Kartoffelform' mit -113 m im Ind. Ozean und +81 m im Pazifik.

Für die weitere Betrachtung genügt es uns, die Erde als Kugel zu sehen. Es ergibt sich eine Schwierigkeit bei der Abbildung ihrer Oberfläche auf ebene Karten. Versucht man, ein Blatt Papier um einen bunten **Ball** zu wickeln und das Muster abzuzeichnen, wird es vor lauter Falten nicht gehen.

Bei Kartenwerken möchte man ferner, dass alle Winkel stimmen, dass Längen und Flächen überall auf der Karte einen einzigen Maßstab haben. Diese drei Forderungen sind bei Abbildung der Kugel auf ebenen Flächen nie zusammen zu erfüllen!

3. Wie entstehen Landkarten?

Basis für die Herstellung der Landkarten sind Hilfsflächen, die sich später problemlos eben abwickeln lassen. Sie werden um die Kugel "gelegt". Im Prinzip sind es alles **Kegelflächen**, wobei die Ebene und der Zylinder als Grenzkegel mit Öffnungswinkel 0° und 180° anzusehen sind.

Es gelten zuerst folgende Beziehungen:

Kegelprojektion	=	Abstandstreue (für Verkehrskarten)
Azimutalprojektion	=	Flächentreue (Geographie, Statistik)
Zylinderprojektion	=	Winkeltreue (für Navigation)

Am leichtesten lassen sich die für die Abbildung vorzunehmenden mathematischen Operationen dadurch veranschaulichen, dass man sich eine **Lichtquelle** im Innern einer gläsernen Erdkugel denkt, die die Erdoberfläche als Schatten auf der Hilfsfläche abbildet.

Für uns ist die Zylinderprojektion wichtig (Gezeigt ist hier die Normalprojektion mit Zylinderachse = Erdachse) Hier fällt der Name **Gerardus Mercator** (latinisiert für Gerhard Kremer, * 05.03.1512 in Rupelmonde bei Antwerpen, + 02.12.1594 in Duisburg - **vor 400 Jahren**). Mercator schuf 1569 eine aus 18 Blättern bestehende, für die Seefahrt bestimmte Karte, die auf antike Versuche sowie Überlegungen von E. ETZLAUB zurückging. Bei dem Mercator-Entwurf handelt es sich um eine **konforme, normalachsige Zylinderprojektion**. Die Meridiane erscheinen als Geraden, die Karten sind winkeltreu, was für die Navigation mit Kompassen wichtig ist. Bei konstanten Kurswinkeln wird eine als **Loxodrome** bezeichnete Linie befahren. Den kürzesten Weg stellt allerdings die **Orthodrome**, immer ein Großkreis auf der Kugel, dar.

Mercator schuf für sein Kartenwerk den Begriff **Atlas**.

Das Problem der Mercator-Projektion sind die 'Wachsenden Breiten', d. h. eine stärkere Verzerrung zu den Polen hin, weshalb die polaren Regionen (ab 70° bis 80°) oft auf den Karten ausgespart sind. Mit der Flächentreue hapert es überhaupt. So erscheint Großbritannien größer als Indien, obwohl der Subkontinent in Wirklichkeit 13-fach größer ist.

Eine Methode der konformen und annähernd längentreuen Projektion, wie sie für unsere Netzdokumentation wichtig ist, ist die **transversale**, also querachsige Zylinderprojektion, auf die auch die Gauß-Krüger-Koordinaten zurückgehen.

Der Zylinder bildet den Berührungsgroßkreis - hier Meridian - in seiner wahren Länge ab. Um Verzerrungen gering zu halten, werden nur **3°** breite Streifen abgebildet, dann wird der Zylinder weitergedreht. Jeder Meridianstreifen bekommt eine Kennziffer. Bei kleinermaßstabigen Karten, z.B. schon bei 1 : 50.000, ergeben sich Überlappungsbereiche zweier Meridianstreifen (in Deutschland in der Nähe der Linie Lübeck - Braunschweig - Oberstdorf). Für diese Überlappungsbereiche sind auf den Karten Hilfsmarkierungen angegeben, um Vermessung und Standortsbestimmung durchführen zu können.

Für das Geschäftsgebiet **der EAM** gilt die Ziffer 3 für den 3. Meridianstreifen bzw. den Berührungsmidian 9° östl. Greenwich. In Arolsen, durch das der 9°-Meridian genau geht, ist am 14.5.1988 ein Denkmal hierfür errichtet worden.

4. Die Gauß-Krüger-Koordinaten

Johannes Heinrich Louis Krüger (* 21.09.1857 in Elze bei Alfeld, + 01.06.1923), Professor am geodätischen Institut von Potsdam hatte den Nachlass von C. F. Gauß bearbeitet und wird wegen seiner Veröffentlichungen hierzu zusammen mit Gauß genannt:

- Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene (1912),
- Transformation der Koordinaten bei der konformen Doppelprojektion des Erdellipsoids auf die Kugel und die Ebene (1914)

Auf den aus der vorgehend geschilderten Projektion abgeleiteten Karten sind die Abstände vom Äquator die **Hochwerte**, die Abstände vom Meridian die **Rechtswerte**. Angaben mit negativem Vorzeichen für westlich des Bezugsmeridians gelegene Punkte werden vermieden, indem der Nullpunkt um 500 km nach Westen verschoben wird.

5. Die Topographischen Karten

Die **Topographischen Karten (TK)** bieten ihnen sehr viele Informationen über Geländeform und Bauwerke. Das Messtischblatt hat den Maßstab 1 : 25.000, d.h. 4 cm auf der Karte entsprechen 1 km in der Natur.

Die kleinermaßstabigen TK sind in den Maßstäben 1 : 50.000, 1 : 100.000 und 1 : 200.000 erhältlich (Noch kleinere Maßstäbe benötigen eine andere Projektion!). Der Maßstab ist auch als lateinische Ziffer hinter der Bezeichnung TK zu erkennen: L für 50, C für 100, CC für 200.

Die Karten der Bundeswehr oder auch die Generalkarten in unseren Dienst-Kfz werden mit dem UTM-Verfahren (**U**niversale **T**ransversale **M**ercatorprojektion) hergestellt, hier wird ein Schnittzylinder, der zwei dem Hauptmeridian parallele Kleinkreise längengetreu abbildet, benutzt. Der Mittelmeridian wird um den Faktor 0,9996 verkürzt. Die Streifenbreite beträgt 6°. Die Koordinatenbezeichnungen [Buchstabenkürzel für Zonen

bzw. Meldegitter (z.B. 32U), **n** für north, **e** für east] weichen von den Gauß-Krüger-Koordinaten ab. Ab 80° Breite wird wegen der 'Wachsenden Breiten' die **Universale Polare Stereografische Projektion** (UPS) benutzt.

Um auch die Höhen besser erkennen zu können, wird in hügeligem Gelände der Schattenwurf einer fiktiven Beleuchtung in NW eingezeichnet, die **Schummerung**. In älteren Kartenwerken wurde versucht, das Gelände durch mehr oder weniger dichte Schraffen plastisch erscheinen zu lassen.

Es folgen einige Beispiele: Auf der TKL Kassel lassen sich entsprechend der Legende schon viele Informationen entnehmen. Ortsnamen sind für die **Orientierung** wichtig - sie stehen genau von West nach **Ost** (Orient). Auf der TK Kaufungen ist die inzwischen abgebaute 60-kV-Leitung der damaligen EAM zu erkennen.

Zum Überblick dient die Blattübersicht und die Größenverhältnisse der TK, TKL, TKC. Der Zählursprung liegt jeweils in der linken unteren Ecke des Rasters.

6. Landvermessung

Die genauesten Informationen bietet die Deutsche Grundkarte 1 : 5.000. Hierauf sind Ergebnisse der Satellitenmessung, der Luftbild-Stereographie (Photogrammetrie) und der terrestrischen Winkelmessung mit Dreieckskonstruktionen (**Triangulation**) detailliert dargestellt.

Es werden nicht alle Punkte auf den Karten berechnet, sondern es gibt genau vermessene Referenzstrecken von 4 bis 10 km Basislänge (Fehlertoleranz 8 mm auf 10 km, Genauigkeit 1 : 1.250.000), auf die mit örtlichen Messungen Bezug genommen wird. Mit einem **Sextanten** kann durch astronomische Winkelbestimmung der Standort ermittelt werden (heute durch Satellitentechnik!) Mit dem Theodoliten und dem von Gauß entwickelten **Heliotrop** als Visierinstrument werden die Winkel zu den Referenzpunkten (**Trigonometrische Punkte**, TP) gemessen und in die Karten eingetragen. Wie wohl jeder einmal in der Geometrie gelernt hat, werden Dreiecke z.B. über zwei Winkel und eine Seitenlänge definiert. Es ergeben sich je nach Ausgangspunkt verschiedene Dreiecksnetze. Man unterscheidet solche I-ter (Seitenlängen 40 - 70 km), II-ter (20 km), III-ter (5 - 10 km) und IV-ter Ordnung (2 km).

Da aufgrund der **satellitengestützten Positionierungs-** und Navigationssysteme (z. B. GPS / NAVSTAR) und der Laser-Messtechnik inzwischen Längen genauer ermittelt werden können als Winkel - und da auch drei Strecken ein Dreieck definieren, - geht man heutzutage zu der **Trilateration** über.

Auf den TK ist als Hilfsmittel ein **Planzeiger** abgedruckt, der sich als Kunststoffteil auch käuflich erwerben lässt. In der Praxis kann man so mit Karte und Theodolith schnell seinen Standort oder eine Wanderstrecke

oder den Verlauf eines Fernwärmekanal feststellen. Zur Übersicht tut es auch ein **Kompass** [Achtung: Magnetisch Nord ist ungleich Gitternord bzw. geographisch Nord]. Bei Längenberechnungen reicht dann der Satz des Pythagoras. Bei zusätzlichen Höhendifferenzen muss dieser nochmals angewandt werden.

Werden topographische Daten in digitaler Form in die EDV eingegeben und die Berechnungen automatisiert, beginnt das Feld der **Grafischen Datenverarbeitung**.

7. Benutzte Literatur / Quellen

- Binder, Hans (1963) - Ortsangaben mit Hilfe eines Planzeigers,
Mitt.d.Verb.d.dt.Höhlen- und Karstforscher e.V. ,9, Nr. 1
- Brockhaus Enzyklopädie
- CHIP-SPEZIAL Extra, PC Flight Simulator, 1994
- Die Generalkarte, 1 : 200.00, Deutschland, Mairs Geographischer Verlag
- Diercke - Weltatlas, Georg-Westermann-Verlag, Hannover
- Handbuch der Mathematik, Buch und Zeit Verlag, Köln
- HB - Bildatlas Nr. 80, Harz, Leinebergland, Eichsfeld
- Hessisch-Niedersächsische Allgemeine vom 14.05.1988,
Meridiandenkmal in Arolsen
- Karlschmidt (1975) - Wandern und Bergsteigen mit Karte
und Kompass, Bergverlag Rother, München
- Nobel, Hermann (1994) - Rätselraten um historische Steine am
Bilsteinturm,
Mitteilungsblatt Großalmerode, Jg. 26, Nr. 48 - 2.12.1994
- Nordmeyer, Norbert (1979) - Bestimmung von Rechts- und Hochwerten
auf
topographischen Karten, Der Antberg 14, 10.5.1979,
Hemer
- Oeffelen, Dagmar von (1994) - Auch die Mondkarte wird in Mercator-
Projektion
gezeichnet, VDI-Nachrichten Nr. 12, 25. März 1994
- Topographische Karten (Hessisches Landesvermessungsamt,
Niedersächsisches Landesverwaltungsamt -
Landesvermessung)
- Wilhelmy, Herbert (1975) - Kartografie in Stichworten, Verlag F. Hirt.

8. Dia-Übersicht

- 0 Geld - Gauß
- 1 10-DM-Schein Gauß, Glockenkurve
- 2 10-DM-Schein Heliotrop, Triangulation
- 3 Kugelkoordinaten
- 4 Kugelabwicklung
- 5 Globusprojektionen
- 6 Zylinderprojektion
- 7 Transversale Mercatorprojektion
- 8 9°-Denkmal in Arolsen
- 9 TK , TKL
- 10 Normalausgabe, Schummerungsausgabe
- 11 TKL (Lohfelden)
- 12 TK (Lohfelden) - 60-kV-Leitung
- 13 Blattübersicht TK, TKL, TKC
- 14 Grundkarte, 1 : 5.000, Bad Harzburg, Höhen
- 15 Triangulation, TP
- 16 Planzeiger, Pythagoras - auch Höhe!

